**Exercice 1:**

a) $\frac{3}{4} - \frac{11}{10} = -\frac{7}{20}$

b) $\frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{9} = \frac{7}{60}$

c) $\dfrac{3}{\frac{3}{7}} = 7$

d) $\dfrac{1}{\frac{63}{40}\frac{16}{27}} = \frac{15}{14}$

e) $\dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{2}} = \frac{7}{12}$

f) $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{12}{5}$

**Exercice 2:** Comparer les nombres suivants :

a) $\frac{5}{12} \geqslant \frac{3}{7} \iff 35 \geqslant 36$. Donc $\frac{5}{12} < \frac{3}{7}$.

b) $\frac{16}{100} > \frac{5}{33} \iff 528 > 500$. Donc $\frac{16}{100} > \frac{5}{33}$.

**Exercice 3:** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 \neq b$.
On a $\dfrac{a^4 - b^2}{a^2 - b} = a^2 + b$.

**Exercice 4:** Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x} + x = 2$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $\frac{1}{x} + x = 2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.
Conclusion : $S = \{1\}$.

**Exercice 5:** Par l'absurde, supposons qu'il existe deux nombres réels $a$ et $b$ tels que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$.
Multiplions l'égalité par $b$, on obtient :$\frac{b}{a} + 1 = \frac{b}{a+b}$.
En posant, $x = \frac{b}{a}$, on obtient $x + 1 = \frac{x}{x+1}$ i.e. $(x+1)^2 = x$ i.e. $x^2 + x + 1 = 0$. C'est absurde car il n'existe pas de solution réelle pour cette équation.
Conclusion : il n'existe pas deux nombres réels $a$ et $b$ tels que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$.

**Exercice 6:**

a) $2^{12} \times (2^3)^6 = 2^{30}$

b) $(-2)^{2020} = 2^{2020}$

c) $\frac{8^4}{4^4} = 2^4$

d) $4^{-5} = 2^{-10}$

**Exercice 7:** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

a) $q^{n+1} = q.q^n$

b) $q^{2n} = (q^n)^2$

c) $\left(q^3\right)^n = (q^n)^3$

d) $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$

**Exercice 8:** Soit $n \in \mathbb{N}$. Mettre sous la forme $a \times b^n$ (où $a$ et $b$ sont réels).

a) $5^{2n-1} = \frac{1}{5}25^n$

b) $(-1)^n \times 2^{n+1} = 2 \times (-2)^n$

c) $\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d) $\frac{2^{n+1}}{5^{n-2}} = 50 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

**Exercice 9:** Soient $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $r^{2^{k+1}} = r^{2\times 2^k} = \left(r^{2^k}\right)^2$.

**Exercice 10:** On a $2^{222} > 22^{22} \iff 2^{111} > 22^{11} \iff 2^{100} > 11^{11} \iff 16^{25} > 11^{11}$.
Donc $2^{222} > 22^{22}$.

**Exercice 11:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant :

$$u_1 = 5 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2(2^{n-1}+1) + n$.
Initialisation : $2(2^{1-1}+1) + 1 = 4 + 1 = 5 = u_1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = 2(2^{n-1}+1) + n$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n - n - 1 = 4(2^{n-1}+1) + 2n - n - 1 = 2^{n+1} + 4 + n - 1 = 2^{n+1} + n + 3$$

Or $2(2^n + 1) + n + 1 = 2^{n+1} + n + 3$. Donc $u_{n+1} = 2(2^n+1) + n + 1$.
Conclusion : La récurrence est établie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2(2^{n-1}+1) + n$.

**Exercice 12:**

a) $\ln(\mathbf{e}^2) = 2$

b) $\mathbf{e}^{3\ln(2)} = 8$

c) $\ln(12) - \ln(6) = \ln(2)$

d) $\frac{(4+\ln(4))\mathbf{e}^{\ln(3)}}{\ln(4\mathbf{e}^4)} = 3$

**Exercice 13:** Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $\mathbf{e}^{2\ln(t)} = t^2$

b) $\mathbf{e}^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}$

c) $\ln\left(\frac{1}{\mathbf{e}^{2t}}\right) = -2t$

d) $\ln\left(\frac{\mathbf{e}^{2t-1}}{\mathbf{e}^{-t}}\right) = 3t - 1$

**Exercice 14:** Soit $t \in \mathbb{R}$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\mathbf{e}^{-2t}$, on obtient :

$$\frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^{2t}} = \frac{\mathbf{e}^{-t}}{\mathbf{e}^{-2t}+1}.$$

**Exercice 15:** La quantité $\ln(x-3)+\ln(x-1)$ peut uniquement avoir du sens pour $x \in ]3,+\infty[$.
Soit $x \in ]3,+\infty[$.

$$\ln(x-3)+\ln(x-1) = 3\ln(2) \iff (x-3)(x-1) = 8 \iff x^2-4x-5=0 \iff x \in \{5;-1\}$$

Conclusion : $S=\{5\}$.

**Exercice 16:** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 5 \iff x \in \{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$. Donc $S=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

b) Soit $u \in \mathbb{R}$. $(u-7)^2 = 2 \iff (u-7-\sqrt{2})(u-7+\sqrt{2}) = 0$. Donc $S=\{7+\sqrt{2};7-\sqrt{2}\}$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. $a^2+2 \geqslant 2 > 0$. Donc $S=\emptyset$.

**Exercice 17:** Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2xy = x^2-1 \iff x^2-2xy-1=0$$

On reconnaît une equation du second degré, de discriminant $4y^2+4$ strictement positif, qui admet donc deux solutions $\frac{2y+\sqrt{4y^2+4}}{2}$ et $\frac{2y-\sqrt{4y^2+4}}{2}$. Par conséquent, $S=\{y+\sqrt{y^2+1};y-\sqrt{y^2+1}\}$.

**Exercice 18:** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y=x^2$

$$x^4-x^2-2=0 \iff y^2-y-2=0 \iff y \in \{-1;2\} \iff x^2 \in \{-1;2\} \iff x \in \{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$$

**Exercice 19:** Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $a \geqslant 3,\ \ b \geqslant 4,\ \ c \geqslant -2,\ \ d \leqslant -1$ .

a) $a+b+c \geqslant 5$

b) $-2a \leqslant -6$

c) $d-a \leqslant -4$

d) $a^2 \geqslant 9$

e) $c^2 \geqslant 0$

f) $\mathbf{e}^d \leqslant \frac{1}{\mathbf{e}}$

g) $ab \geqslant 12$

h) Pas de majoration ni de minoration de $ac$.

i) $ad \leqslant -3$

**Exercice 20:**

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\ln(2x) < \ln(3x) \iff \ln(2) < \ln(3)$. Donc $S=\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}^x+1 \geqslant 1 > 0$. Donc $S=\emptyset$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(5x-4)(4x-5) > 0 \iff \left(x-\tfrac{4}{5}\right)\left(x-\tfrac{5}{4}\right) > 0 \iff \begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x < \frac{5}{4} \end{cases} \iff x > \tfrac{5}{4} \text{ ou } x < \tfrac{4}{5}.$$

Donc $S=\left]-\infty,\frac{4}{5}\right[\cup\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\frac{2x+1}{x-1} < 0 \iff \underbrace{\begin{cases} 2x+1<0 \\ x-1>0 \end{cases}}_{\text{Impossible}}$ ou $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1<0 \end{cases} \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$. D'où $S = \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 5x \leqslant 6x \iff x(x-1) \leqslant 0 \iff x \in [0,1]$. D'où $S = [0,1]$.

f) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Premier cas : $x > 1$. $\frac{1}{x-1} \leqslant 1 \iff 1 \leqslant x-1 \iff 2 \leqslant x$.
Deuxième cas : $x < 1$. $\frac{1}{x-1} \leqslant 1 \iff 1 \geqslant x-1 \iff \underbrace{2 \geqslant x}_{\text{Toujours vraie}}$.

Donc $S = ]-\infty, 1[\cup[2, +\infty[$

**<u>Exercice</u>** <u>21:</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, on a $x < 0 < \sqrt{x^2+1}$.
Si $x > 0$, $x^2 < x^2 + 1$ d'où $x < \sqrt{x^2+1}$.
Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < \sqrt{x^2+1}$.